

-----彌-----封-----線-----

*答案不得以 C, P, H 表示, 如有分數請以最簡分數表示, 根式則以最簡根式表示

一基礎填充題(每格 3 分)

1. 若 $2x + 2^x = 3$ 之實根為 α , 而 $2x + 2\log_2(x-1) = 3$ 之實根為 β , 求 $\alpha + \beta =$ _____
2. $\triangle ABC$ 的三中線長分別為 $5, \sqrt{73}, 2\sqrt{13}$, 求 $\triangle ABC$ 之面積 _____
3. 在 $\triangle ABC$ 中 $\overline{AB} = 86, \overline{AC} = 97$, 若以 A 點為圓心, 且以 \overline{AB} 為半徑畫圓, 交 \overline{BC} 於 B 點及 D 點, 若 \overline{BD} 及 \overline{CD} 均為整數, 則 $\overline{BC} =$ _____
4. 已知二次函數 $f(x) = ax^2 + bx + c$ 在 $x = \frac{1}{2}$ 有最大值 4, 且 $ax^2 + bx + c = 0$ 的兩根 α, β 恰滿足 $|\alpha| + |\beta| = 2$, 則 $a =$ _____
5. 黑箱中有 8 枚硬幣, 其中有 3 枚雙面皆是人頭, 3 枚雙面皆是字. 其餘 2 枚一面是人頭. 一面是字; 將手伸入箱中. 握住一枚硬幣. 取出後打開手掌. 發現一面是人頭. 則另一面也是人頭的機率是 _____
6. a, b, c 為三個相異實數, 已知方程式 $x^2 + ax + 1 = 0$ 及 $x^2 + bx + c = 0$ 有一個相同的實根, 而方程式 $x^2 + x + a = 0$ 及 $x^2 + cx + b = 0$ 也有一個相同的實根, 求 $a + b + c =$ _____
7. $8 \times \underbrace{\left(\overbrace{888 \dots 8}^{k \text{ 個 } 8} \right)}_{k \text{ 個 } 8}$ 的乘積之各位數字和為 1000, 則 $k =$ _____
8. 設 $f(x)$ 是首項係數為 1 的 10 次實係數多項式, 若 $f(x) = 0$ 的 10 個根之和為 2014, 則方程式 $f(x^3 - 1) = 0$ 的所有根之和為 _____
9. 若二次多項式 $f(x) = 3 \cdot \frac{(x-\sqrt{3})(x-\sqrt{5})}{(\sqrt{2}-\sqrt{3})(\sqrt{2}-\sqrt{5})} + 4 \cdot \frac{(x-\sqrt{2})(x-\sqrt{5})}{(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{5})} + 6 \cdot \frac{(x-\sqrt{2})(x-\sqrt{3})}{(\sqrt{5}-\sqrt{2})(\sqrt{5}-\sqrt{3})}$ 則 $f(99) =$ _____
10. 擲三粒均勻骰子一次, 則在至少出現一粒四點的條件下, 其點數和為奇數的機率為 _____
11. 設 $S_n = \frac{1}{3} - \frac{1}{8} + \frac{1}{15} - \frac{1}{24} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n^2 + 2n}$, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = L$, 則滿足 $|S_n - L| < \frac{1}{1000}$ 的最小正整數 n 為 _____

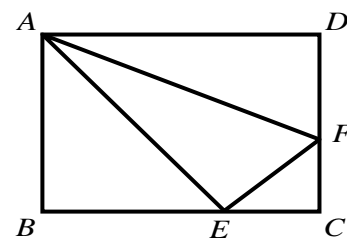
-----彌-----封-----線-----

12. 已知一個線性規劃問題的可行解區域為四邊形 $ABCD$ 及其內部，其中 $A(4,0)$, $B(8,10)$, $C(6,14)$, $D(2,6)$ 為坐標平面上的四個點。若目標函數 $k = ax + by + 32$ (a, b 為實數) 在四邊形 $ABCD$ 的邊界上一點 $(4,10)$ 有最小值 18，則目標函數 k 在可行解區域的最大值是_____

13. 置於暗室中的一個抽屜內有 100 隻紅襪, 80 隻綠襪, 60 隻藍襪, 40 隻白襪, 小明從抽屜中取襪子, 每次取一隻, 但無法看到所取襪子的顏色, 為了確保取出的襪子至少有 10 雙, 最少必須取幾隻襪子?_____

14. 四面體 $ABCD$ 中, $\overline{AB} = \overline{AC} = \overline{AD} = 9$, $\overline{BC} = \overline{CD} = \overline{BD} = 6$, 則兩歪斜線 \overline{AB} 與 \overline{CD} 的距離為_____

15. 如圖, E, F 分別在矩形 $ABCD$ 的邊 BC, CD 上, 若 $\triangle ABE, \triangle ECF, \triangle AFD$ 的面積分別為 3, 1, 2, 則 $\triangle AEF$ 的面積是_____



16. 已知 $|\vec{a}| = 1$, $|\vec{b}| = 2$, $|\vec{c}| = 3$, $k > 0$, 若 $\vec{a} + 2\vec{b} + k\vec{c} = \vec{0}$, 則 k 的取值範圍為_____

17. 設 $n \in \mathbb{N}$, 若 $(2 + \sqrt{3})^n = x_n + y_n\sqrt{3}$, 其中 $x_n, y_n \in \mathbb{N}$, 則 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} =$ _____。

18. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{(2n+1)^2}{n^3} + \frac{(2n+3)^2}{n^3} + \dots + \frac{(2n+(2k-1))^2}{n^3} + \dots + \frac{(4n-1)^2}{n^3} \right] =$ _____

19. 求空間中兩平面 $E_1: 4x - 5y - 3z = -6$, $E_2: x - y + 4z - 3 = 0$ 的鈍夾角平分面方程式_____

20. $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a + b + c = 9$, $ab + bc + ca = 0$, 則 $a + b$ 之最大值為_____

二進階填充題(每格 4 分)

21. 考慮所有滿足 $\begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{2014} = 2015 \\ \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \dots + \frac{1}{a_{2014}} = 2015 \end{cases}$ 的 2014 個正數 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{2014}$,

則對於 $i = 1, 2, 3, \dots, 2014$, $a_i + \frac{1}{a_i}$ 之最大值為_____

22. 複數平面上, 複數 z_1, z_2 所對應之點分別為 A, B , 若 $|z_1 - 2 - 3i| = |z_1 - 4 + 3i|$, 且 $z_2 = (\sqrt{3} + i)z_1$, 若 O 為原點, 則 $\triangle OAB$ 之最小面積為_____

23. 若 m 是整數, 且方程式 $3x^2 + mx - 2 = 0$ 的兩根都大於 $-\frac{9}{5}$ 且小於 $\frac{3}{7}$, 則 $m =$ _____

-----彌-----封-----線-----

24. 有甲乙丙丁戊己庚辛 8 人, 排成一列, 若甲乙兩人不相鄰且丙丁戊三人彼此不相鄰, 則排法數有

_____種

25. a, b, c 三數成等比遞增數列, 和為 19, 若將此三數分別加上 1, 5, 6 後三數成等差數列, 則 a, b, c 三數的乘積為_____

26. 設 $\triangle ABC$ 的三頂點坐標分別為 $A(-2, 7, 15)$, $B(1, 16, 3)$, $C(10, 7, 3)$, 試求 $\triangle ABC$ 的垂心坐標

27. 設空間中二相異平面 E, F 交於一直線 L . 若 P, Q 兩點在直線 L 上, A 點在平面 E 上, B 點在平面 F 上且 $\overline{AP} \perp \overline{PQ}, \overline{BQ} \perp \overline{PQ}$. 已知 $\overline{AP} = a, \overline{BQ} = b, \overline{PQ} = c$ 且平面 E, F 的夾角為 θ . 試以 a, b, c, θ 表示 $\overline{AB} =$ _____

28. 甲乙丙三人練習傳球, 一共傳球 10 次。球首先從甲手中傳出, 若第 10 次仍傳給甲, 共有_____種不同的傳球方法

29. 令 L 為過原點 $O(0, 0)$ 及 $A(a, b)$ 的直線, 『若點 P 對 L 作垂線的垂足為 P' 』稱為 P 對 L 作投影. 已知「對 L 作投影」的作用可表示成一個線性變換 T , 試求代表 T 的二階方陣為_____

30. 甲, 乙兩人競選班代表共獲 13 張票, 若開票時甲, 乙兩人的得票差距一直保持在 2 票之內(含 2 票), 而最後甲獲勝, 則開票的情形有_____種